平成１７年度第１次募集（平成１６年１０月入学を含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

（物理学）Ａ１

自然構造科学専攻

基礎科目

注意事項

１．この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

２．この冊子は，表紙を含めて４ページである。

３．解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

４．受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

５．解答時間は，１２０分である。

６．下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

下図のように，滑らかな水平板に小穴をあけ，長さ ℓ の軽い糸を通す．ただし，水平板は十分大きくて固定されているものとする． 板上の糸の端に質量 m_1 の小物体１を付け，他端には質量 m_2 の小物体２を付けて鉛直にたらす．そして，板上で小物体１を運動させる． ただし，小穴と糸の間には摩擦がないとする．小穴の位置を原点 O にとり，鉛直下向きに z 軸の正の方向をとった円柱座標を用いると，小物体１の位置は r, θ で表され，小物体２の位置は z で表される．

以下の問いに答えよ．

(1) $r + z = \ell$ の拘束条件から，独立変数は２個になるので，これらを r, θ に選ぶことができる． 小物体１，２の運動を記述するラグランジアンを独立変数 r, θ を用いて表せ．ただし，重力加速度は g とする．なお，小物体１の速度の動径方向成分は $\dot{r}$，角度方向成分は $r\dot{\theta}$ である．

(2) ラグランジュの運動方程式を導け．

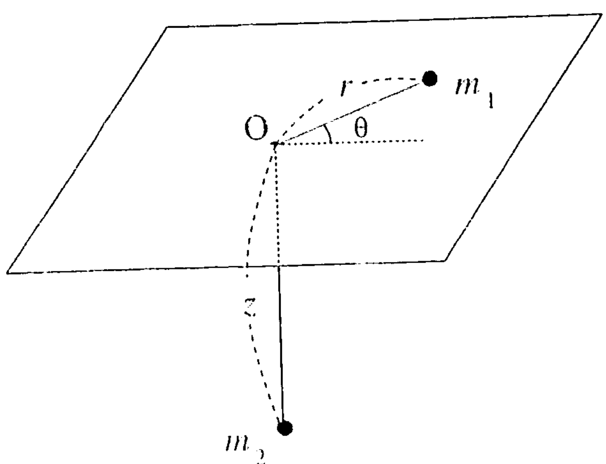
(3) z 軸まわりの角運動量が保存することを示せ． さらに，その値を L_0 とし，それを用いて，動径方向の運動方程式を表せ．

(4) 前問で求めた運動方程式は円運動を解にもつ． 円運動の半径が r_0 $(0 < r_0 < \ell)$ であるとき，L_0 の大きさを $m_1,\ m_2,\ g,\ r_0$ を用いて表せ． また，そのときの動径方向と角度方向の速度成分を求めよ．

次に，円運動が安定か不安定かを調べよう． そのため角運動量 L_0 を変えずに，小物体１の動径座標を r_0 から微小に変化させる．

(5) $r = r_0 + \epsilon$ $(\epsilon \ll r_0)$ として，$\dfrac{\epsilon}{r_0}$ の１次まで取ることにより，ϵ の満たす運動方程式を求めよ．

(6) 前問で求めた運動方程式から，運動が安定か不安定かを説明せよ．



[2]

誘電率が ε_1 の誘電体 1 と誘電率が ε_2 の誘電体 2 が接触しているとき，その境界面上で成立すべき条件について確かめる．

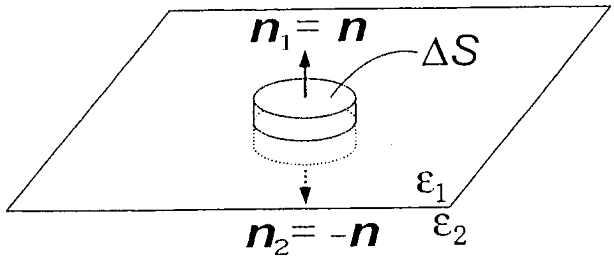


図 1: 電束密度の法線成分の連続性.

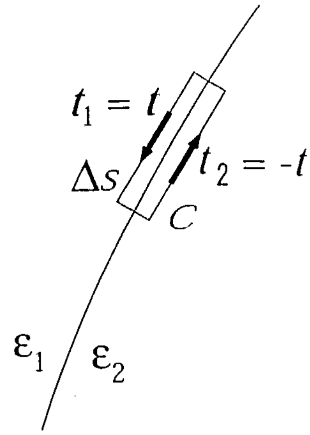


図 2: 電場の接線成分の連続性.

(1) はじめに，図 1 に示すように，二つの誘電体の境界面にまたがる境界面上に断面積 ΔS のきわめて薄い微小円筒を考える．$\boldsymbol{n}_1$ $(=\boldsymbol{n})$ と $\boldsymbol{n}_2$ $(=-\boldsymbol{n})$ は微小円筒面に外向きに立てた単位法線ベクトルである．この微小円筒に積分形のガウスの法則を適用して，境界面における電束密度の接続条件を導出せよ．ただし誘電体 1 内の電束密度を $\boldsymbol{D}_1$ とし，誘電体 2 内のそれを $\boldsymbol{D}_2$ とする．また，境界面上には真電荷は存在しないと仮定する．

(2) つぎに，図 2 のような境界面にまたがる微小な長方形の閉曲線 C を考える．図中 $\boldsymbol{t}_1$ $(=\boldsymbol{t})$ と $\boldsymbol{t}_2$ $(=-\boldsymbol{t})$ は境界面に平行な単位ベクトルであり，また Δs は C の境界面に沿う一辺の長さである．ただし誘電体 1 内の電場を $\boldsymbol{E}_1$ とし，誘電体 2 内の電場を $\boldsymbol{E}_2$ とする．この閉曲線 C に

$$\int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

を適用して，境界面における電場の接続条件を導出せよ．

(1) の接続条件を考慮して，図 3 の断面をもつ円筒形のコンデンサー A の静電容量を求める．内径 a，外径 b，長さ ℓ の円筒形のコンデンサーの中に，その中心軸から半径

c ($a < c < b$) の円筒を境として，その内側に誘電率 ε_1，外側に誘電率 ε_2 の誘電体がつめてある．

(3) コンデンサーAの内側の電極に単位長さあたり $+\lambda$ の電荷を，外側の電極に単位長さあたり $-\lambda$ の電荷を与えたとする．電束密度の大きさおよび各誘電体領域における電場の大きさを中心軸からの距離 r の関数として求めよ．

(4) コンデンサーAの内外の電極間の電位差を $\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, c$ を用いて表せ．

(5) このコンデンサーAの静電容量を $\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b, c$ を用いて表せ．

つぎに，(2) の接続条件を考慮して，図4のように円筒の断面の半分ずつが別の誘電体で満たされている円筒形のコンデンサーBの静電容量を求める．内径 a，外径 b，長さ ℓ の円筒形のコンデンサーの中に，その左側に誘電率 ε_1，右側に誘電率 ε_2 の誘電体がつめてある．

(6) コンデンサーBの内側の電極に単位長さあたり $+\lambda$ の電荷を，外側の電極に単位長さあたり $-\lambda$ の電荷を与えたとする．電場の大きさを中心軸からの距離 r の関数として求めよ．

(7) コンデンサーBの内外の電極間の電位差を $\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b$ を用いて表せ．

(8) このコンデンサーBの静電容量を $\ell, \varepsilon_1, \varepsilon_2, a, b$ を用いて表せ．

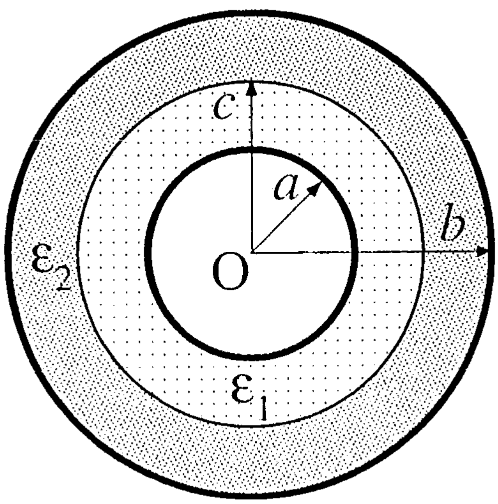


図 3: 円筒形コンデンサーAの断面．

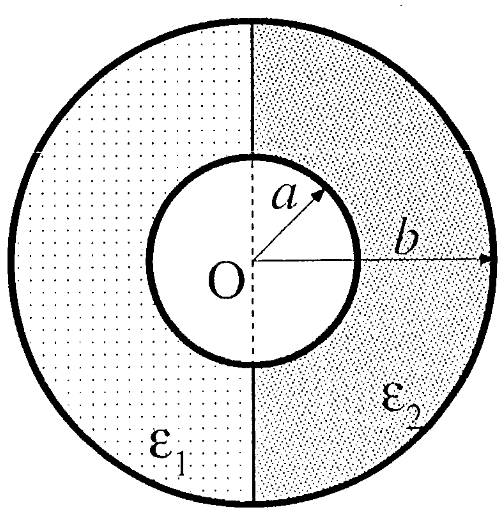


図 4: 円筒形コンデンサーBの断面．