平成１７年度第１次募集（平成１６年１０月入学を含む）

新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

（物理学）Ａ１

自然構造科学専攻

専門科目

注意事項

１．この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

２．この冊子は，表紙を含めて６ページである。

３．解答は，すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。

４．受験番号は，各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。

５．解答時間は，１８０分である。

６．下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

[1]

内部自由度のない質量 m の粒子が1次元のポテンシャル $V(x)$ の中を運動するときのシュレーディンガー方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right\}\phi(x)=E\phi(x)$$

である.

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0 \\ 0 & 0\le x<L \quad (\text{領域 I}) \\ V_0 & L\le x \quad (\text{領域 II})\end{cases}$$

とし，以下の問いに答えよ.(図1参照)

(1) $0<E<V_0$ と仮定すると，各領域 I, II でのシュレーディンガー方程式の一般解は

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{I}}(x) &= Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \quad (\text{領域 I}) \\ \phi_{\mathrm{II}}(x) &= Ce^{\gamma x}+De^{-\gamma x} \quad (\text{領域 II})\end{aligned}$$

のように表される. k および γ を m, $\hbar$, E, V_0 のうち適当なものを用いて表せ. なお，A, B, C, D は境界条件などから決定されるべき定数である.

(2) 波動関数が $x=0, L, \infty$ で満たすべき境界条件より，固有エネルギーを決定する式が

$$\beta = -\alpha\cot\alpha \qquad \text{(a)}$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{2mV_0L^2}{\hbar^2} \qquad \text{(b)}$$

となることを示せ. ただし，

$$\alpha = Lk, \qquad \beta = L\gamma$$

である.

(3) 図2に式 (a) のグラフが図示されている. このグラフを参考にし，α-β 平面上での式 (a), (b) の交点を調べることにより，$V_0=\frac{1}{L^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ の場合，および，$V_0=\frac{4\pi^2}{L^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ の場合に対して束縛状態の数を求めよ.

(4) $V_0=\frac{9\pi^2}{8L^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ のとき，$\alpha=\frac{3}{4}\pi$ が交点の解であることを示せ. また，このときの基底状態エネルギーを求めよ.

次に，ポテンシャル $V(x)$ が $x=0$ に対して左右対称な図3のような形になったとする. V_0 の値は，引続き $V_0=\frac{9\pi^2}{8L^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ であるとしよう.

(5) (4) の結果を利用すると，図3の場合の第一励起状態は，新たに詳しい計算をせずに求めることができる. 理由を述べよ.

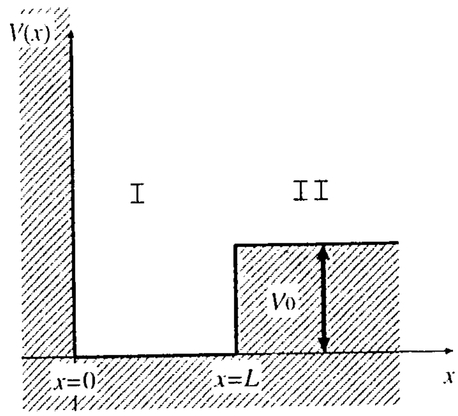

図 1

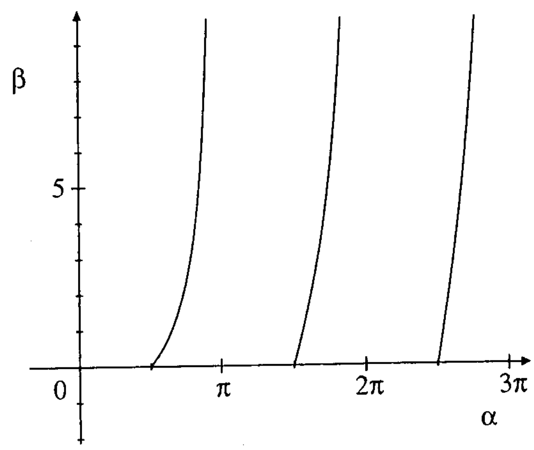

図 2

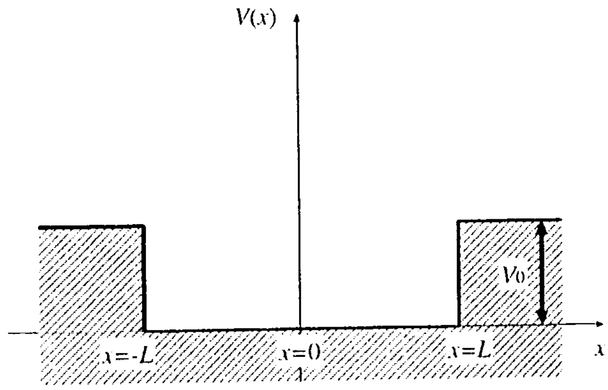

図 3

[2]

角振動数 ω の調和振動子 $N(\gg 1)$ 個からなる孤立系があるとする．量子力学によると1個の調和振動子のエネルギー固有値は $\varepsilon_n = \hbar\omega(n+1/2)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ で与えられる．この問題をミクロカノニカルアンサンブルで考えよう．

(1) N 個の調和振動子の全エネルギーが E となるような状態数が

$$W(E) = \frac{(N+M-1)!}{M!(N-1)!}$$

となることを説明せよ．ただし，M は $E = \hbar\omega(M + N/2)$ で定義される整数である．

(2) エントロピー $S(E)$ を求めよ．ただし，自然数 n が十分大きな時に成り立つスターリングの公式 $\log n! \sim n\log n - n$ を用いてよい．

(3) エネルギー E を温度 T の関数として表せ．

今度は，角振動数 ω の調和振動子 N 個からなる系が温度 T に保たれているとする．この問題をカノニカルアンサンブルで考えよう．

(4) 分配関数を求めよ．なお，必要ならば，$|r| < 1$ の場合に成り立つ無限等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

を用いて良い．

(5) 得られた分配関数を利用してエネルギーの期待値を計算し，(3) の結果と一致することを示せ．

(6) 比熱を求め，低温の極限と高温の極限の振舞いを調べよ．また，比熱の温度変化のおおよその様子をグラフに表せ．

[3]

以下の問いに答えよ.

(1) 次の文章は, 放射線検出器の一つであるGM(ガイガー・ミュラー)計数管の動作原理を述べたものである. [ ] 内に当てはまる語句を語群から選び, その番号を解答欄に記せ.

GM 計数管は放射線の性質である [a] を利用したものである. 図1のように管の中心に置かれた金属線と管壁の金属の間には高抵抗と電源がつながれ, 高抵抗で生じる信号は増幅器と波高選別器を通して計数回路へとつながっている. 中心の金属線近くの電場は管壁近くに比べて [b]. この管内には中性ガスが入れてある. 入射窓から荷電粒子が入るとガスを [c] して電子とイオンを作り出す. 電源電圧が高い場合, 生じた電子は加速され, 新たにガスを次々と [c] する. このように, 2次的に発生した電子が次々とガスを [c] する現象を [d] という. 発生した電子は [e] に達し, 陽イオンは [f] に向かって移動し出力にはパルスが発生する. GM計数管は [d] が大きく, パルスの高さは入射放射線の種類に [g].

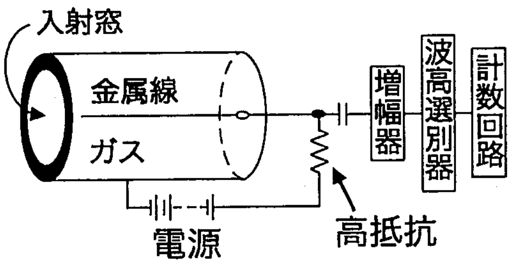

図 1

語群：

①蛍光作用, ②電離作用, ③電子対, ④強い, ⑤弱い, ⑥消滅, ⑦高圧, ⑧電離, ⑨生成, ⑩電子なだれ, ⑪放電, ⑫再結合, ⑬陰極, ⑭陽極, ⑮よる, ⑯よらない

(2) GM計数管以外に放射線検出器をひとつあげて, その動作原理を簡単に説明せよ.

(3) 次の文章はホール効果について述べたものである．図2を参考に [イ]～[ホ] に適当な語句，式を解答欄に記せ．

長さ l，幅 w，厚さ d の直方体の導体を考える．図2のように長さ，幅，厚さの各方向を x，y，z 方向とし，それぞれの中心に原点Oをとる．点Pと点Qの座標はそれぞれ $(0, -w/2, 0)$，$(0, w/2, 0)$ である．x の正方向に電流 I を流す．ここで磁束密度の大きさが B の磁場を z の正方向にかける．導体中のキャリアは y の負方向に力を受ける．この力を磁場が及ぼす [イ] と呼ぶ．このとき，導体のキャリアがホールであれば，点Pは点Qよりも [ロ] 電位を示す．定常状態では，y 方向に生じる大きさ E_H の電場による力と [イ] はつり合っているので，キャリアの速さを v とすれば，$E_H = vB$ となる．キャリアの速さは電流密度の大きさ J，キャリア電荷 q，キャリア密度 n を用いれば，$v = J/(nq)$ であるから，I を用いると，$v =$[ハ] と表される．PQ間の電圧，すなわちホール電圧 V_H を用いれば，E_H=[ニ] と表される．ホール係数を $R_H = 1/(nq)$ として，R_H，I，B，d を用いれば，V_H=[ホ] と表される．なお導体中のキャリア密度および電流密度は一様であるとする．

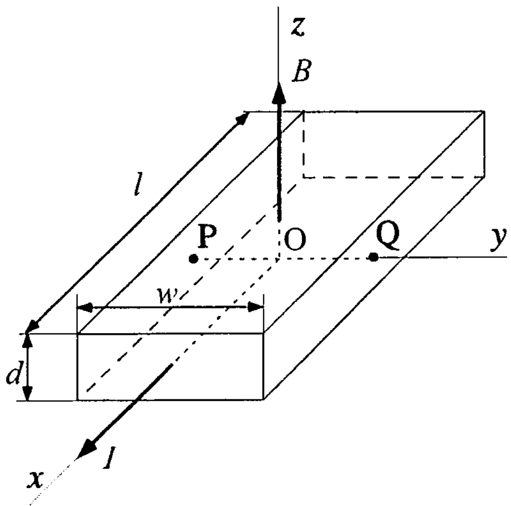

図 2

(4) 時間変動する磁場を測定する簡単な方法はコイルを用いることである．時間変動する磁束密度 $\boldsymbol{B}(t)$ の磁場が，巻き数 n，断面積 S のコイルを垂直に貫いている．このときコイルに生じる誘導電圧 $V(t)$ を測定する．$V(t)$ と $\boldsymbol{B}(t)$ との関係式を示せ．ただし，磁場は空間的に一様であるとする．