

平成18年度第1次募集（平成17年10月入学含む。）
新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程入学者選抜試験問題

（専攻名）自然構造科学専攻

（試験実施単位名）A1 物理学

専門科目

注意事項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 この冊子は、表紙を含めて8ページある。
- 3 解答は、すべて解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された箇所に必ず記入すること。
- 5 解答時間は、180分である。
- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。

[1]

水素原子は電波天文学において重要な役割をする電波領域の電磁波を吸収あるいは放射するという。この現象を超微細相互作用によって生じる水素原子のエネルギー準位のずれによって理解しよう。

水素原子のエネルギー準位は、電子が陽子によるクーロン相互作用を受けて運動するとして基本的に理解される。電子の質量を m 、電子および陽子のもつ電荷の大きさを e とすれば、電子のハミルトニアン H_0 は、電子の位置座標を (x, y, z) として

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{r}$$

で与えられる。ここで、陽子は座標原点に固定し、クーロン相互作用は適当な単位系で表現した。 $\hbar$ はプランク定数 h により $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で定義され、 r は電子-陽子間の距離 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を表す。

水素原子の基底状態では、電子は軌道角運動量 $\ell = 0$ を持つ。このとき電子の波動関数は r だけの関数となり、それを $\psi(r)$ と表す。以下、角運動量は $\hbar$ の単位で測る。

以下の問いに答えよ。

- (1) r だけの関数 $\psi(r)$ に対して、次の関係式が成立することを示せ。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \psi(r)$$

- (2) 規格化された波動関数 $\psi(r)$ は、適当な定数 a を用いて

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (1)$$

によって与えられる。これが H_0 の固有関数になるように a を決め、それを m , $\hbar$, e で表せ。また、基底状態のエネルギー E_0 は $-\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ となることを示せ。

次に、電子も陽子も大きさ $\frac{1}{2}$ のスピンを持つことを考慮する。このとき、電子は陽子がつくる磁場によってわずかではあるがエネルギー変化をうける。この摂動 (超微細相互作用) W は、電子が $\ell = 0$ の運動状態にあるときは、電子と陽子のスピン演算子をそれぞれ $\vec{s}_e$, $\vec{s}_p$ として

$$W = F (\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p)$$

で与えられる。ここで F は正の定数 k およびデルタ関数 $\delta(x)$ などにより

$$F = k \pi a^3 \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

と表される。

電子のスピンと陽子のスピンの和 (全スピン) の演算子を $\vec{S} = \vec{s}_e + \vec{s}_p$, その z 成分の演算子を S_z とする。 $\vec{S}^2, S_z$ の規格化された同時固有関数を $|SM\rangle$ と表す。ここで全スピンの大きさ S は $S = 0$ または $S = 1$ の値をとる。すなわち, 電子と陽子のスピン状態はスピン一重項 ($S = 0$) またはスピン三重項 ($S = 1$) である。

(3) $\vec{s}_e^2$ の固有値はいくらか。

(4) 全スピンの大きさが S のとき,

$$S_z |SM\rangle = M |SM\rangle$$

を満たす S_z の固有値 M はどのような値をとりうるか。

(5) 全スピン関数 $|SM\rangle$ に対して

$$\langle SM | (\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p) | SM \rangle = \frac{1}{2} \left(S(S+1) - \frac{3}{2} \right)$$

となることを示せ。

超微細相互作用まで考慮した水素原子のハミルトニアンは $H_0 + W$ となる。電子の波動関数が式 (1) の $\psi(r)$ で記述され, 電子と陽子のスピン状態が全スピン関数 $|SM\rangle$ によって表されているとき, 摂動 W まで考慮した水素原子のエネルギー $E(S)$ は

$$E(S) = E_0 + \Delta E(S)$$

となる。このようにして, 水素原子の基底状態は全スピンの大きさ S の値に応じて 2 つのエネルギー準位に分かれる。

(6) これらの準位の間で, エネルギー差 $\delta E = E(1) - E(0)$ に等しいエネルギーをもった光 (電磁波) の放射あるいは吸収が起こる。この光の波長 λ を $\delta E, \hbar$, 光速 c を用いて表せ。

(7) $\Delta E(S)$ は一次の摂動論で, $G \langle SM | (\vec{s}_e \cdot \vec{s}_p) | SM \rangle$ と与えられる。 G を求めよ。

(8) $k = 5.88 \times 10^{-6} \text{ eV}$, $\hbar c = 1.97 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m}$ である。問 (6) の光の波長 λ を有効数字 2 桁で求めよ。

[2]

一般に固体物質の多彩な磁氣的性質は電子が持っているスピンの起源がある。

ここでは、スピン $\frac{1}{2}$ を持つ“原子” N 個からなる系を考える。原子のスピン状態

には上向き下向きが存在しているために、外部から強さ H の磁場を加えると原子のエネルギーは $\pm\mu H$ を持った2つの量子状態に分裂する。ここで、 μ はボーア磁子である。温度を T 、ボルツマン定数を k とし、以下の問いに答えよ。

- (1) この系の分配関数 Z を求めよ。
- (2) ヘルムホルツの自由エネルギー F とエントロピー S を求めよ。
- (3) 有限の磁場では、低温極限 $T \rightarrow 0$ で熱力学第3法則（ネルンストの熱定理）が成立していることを示せ。
- (4) 系の比熱 $C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H$ を求めよ。ここで、 U は内部エネルギーである。
- (5) 磁場 H で発生する系の磁化 $M = - \left(\frac{\partial F}{\partial H} \right)_T$ を求めよ。
- (6) 磁場 H での磁化率 $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T$ を求めよ。
- (7) 磁場を弱くした極限では2つの量子状態はほとんど縮退している。このとき、磁化率は低温極限 $T \rightarrow 0$ でどのように振る舞うかを示せ。

[3]

次の小問 (A) ~ (C) のうち2問を選んで解答せよ。解答は、文章中の [①~⑧] に入る適当な言葉または式を下の用語一覧より選べ。ただし、用語は重複して用いてよい。解答用紙にはどの小問を選択したかを示すこと。

(A) エレクトロニクス

図1, 図2はそれぞれトランジスタを1個用いた増幅回路である。図1は [①] 接地型回路である。この回路の入力はコンデンサーを介してトランジスタの [②] に入っていて、信号の増幅度は [③] で表される。この回路は、トランジスタの線間容量などを考慮すると入力側に [④] フィルターが実質的に入っていることになるため、トランジスタ自身の周波数特性に比べて高周波側の特性が [⑤] 。

一方、図2は [⑥] 接地型回路である。これは図1の回路と異なり、入力側に [④] フィルターはできないので、図1の回路に比べると高周波側の特性は [⑦] 。

いずれの回路の電源ラインも、コンデンサー C_3 と C_4 が接地側(GND)につながっている。これらは電源ラインのノイズを低減させるためにある。ただし、2つのコンデンサーでは有効な周波数領域が異なり、低周波領域のノイズを低減させるために有効なのは C_4 の [⑧] コンデンサーである。

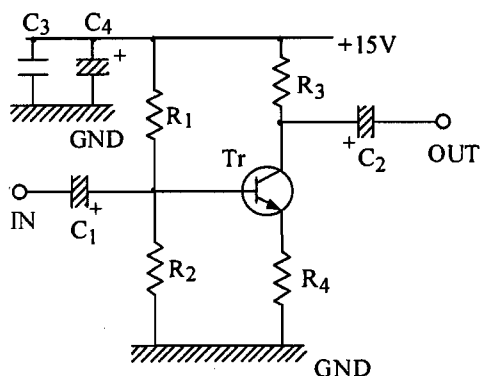


図 1

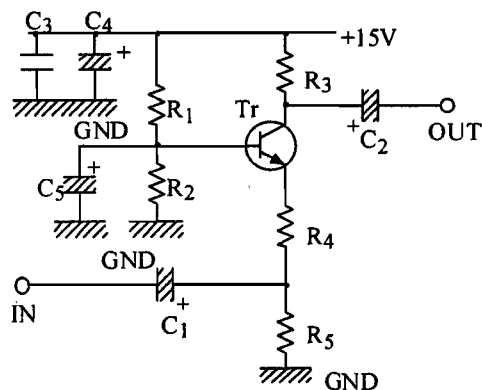


図 2

[Aの用語一覧]

コレクター, エミッター, ベース, ゲート, R_1/R_2 , R_2/R_1 , R_3/R_4 , R_4/R_3 , ハイパス, バンドパス, ローパス, 良い, 悪い, 電解, セラミック

(B) γ 線検出

^{137}Cs は β 崩壊した後、その一部が661keVの γ 線を放出する。この γ 線をシンチレーション検出器で測定したときのスペクトルが図3である。これは増幅器を通して増幅された検出器の信号をマルチチャンネルアナライザーによって波高分析したものである。横軸に信号の高さを取り、縦軸はその信号の個数を示す。

一般にシンチレーション検出器中で γ 線は [①], [②], [③] の3種類の相互作用により、そのエネルギーが荷電粒子に移され、この荷電粒子がシンチレーター中の原子を励起する。この原子から放出されるシンチレーション光の光量を測定することで γ 線のエネルギーを調べることができる。

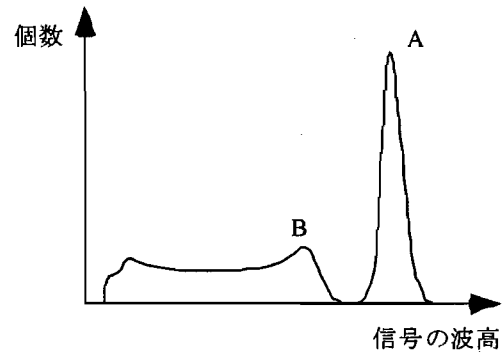


図3

さて、図3でAの部分は [①] によるピークである。 [①] は、 γ 線が原子に束縛された1つの電子に全てのエネルギーを与え、その電子が束縛状態を離れて原子外へ飛び出る現象である。飛び出たあとの電子の運動エネルギーは一定の値を取り、 γ 線のエネルギーと比べて [④]。このときに出てくる電子は ^{137}Cs の γ 線の場合、 [⑤] 殻からのものが最も多い。

図3のBの部分は [②] によるものである。 [②] は γ 線と自由電子との散乱と考えられる。このとき、散乱後の電子の運動エネルギーは γ 線の散乱角に依存するため、単一ではなく連続的な分布をする。散乱後の電子の運動エネルギーは、散乱角が γ 線の入射方向に対し [⑥] ° のとき最大値を取る。そのときの電子が得る運動エネルギーの値は [⑦] として知られている。

[③] は γ 線のエネルギーが [⑧] MeVより大きい場合に起きるが、 ^{137}Cs の場合には起きないため図3ではあらわれない。

[Bの用語一覧]

電子対消滅, 電子対生成, 光電効果, オージェ効果, ラマン散乱, コンプトン散乱, 後方散乱, オージェ電子, 大きい, 等しい, 小さい, K, L, M, コンプトン端, フェルミレベル, 0, 90, 180, 0.511, 1.022, 0.661

(C) 核磁気共鳴

核磁気共鳴の古典的描像を得るために、磁場中に置かれた磁気モーメントの運動を考える。

一様で静的な外部磁場（磁束密度 $\vec{B}$ [T]）中に磁気モーメント $\vec{\mu}$ [J/T] を置く。磁気モーメント $\vec{\mu}$ と角運動量 $\vec{I}$ の間には $\vec{\mu} = \gamma \vec{I}$ の関係があるとする。 γ は磁気回転比とよばれ、ここでは $\gamma > 0$ とする。

回転の運動方程式は、一般に角運動量を $\vec{I}$ 、トルクを $\vec{N}$ とすると、 $\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{N}$ で与えられる。いま、磁場中で磁気モーメントが受けるトル

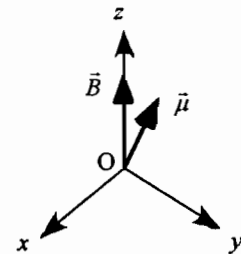


図 4

クは [①] であるから、磁気モーメントが従う運動方程式は $\frac{d\vec{\mu}}{dt} =$ [②] となる。ここで、磁気モーメントの下端を原点 O とし、磁場の向きを z 軸の正の向きにとる（図 4）。磁束密度の成分は $(0, 0, B)$ とする。運動方程式より磁気モーメントは z 軸のまわりに [③] 運動をすることが分かる。このときの回転の向きは、+z の方向から -z を見たとき、[④] になる。

このときの角振動数を求めるために、z 軸のまわりに y 軸から x 軸の向きに角振動数 ω （角速度ベクトル $\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$ ）で回転する座標系を考える。この回転座標系では磁気モーメントの感じる有効な磁場は z 成分のみを持ち、その磁束密度の大きさは [⑤] となる。すなわち $\omega =$ [⑥] を満たす角振動数の回転座標系では有効磁場が 0 となり、そこでは磁気モーメントは動かない。これより磁場中に置かれた磁気モーメントの [③] 運動の角振動数は [⑥] となる。この角振動数を [⑦] とよぶ。

次に xy 平面と平行に磁場を加える。この磁場の向きは y 軸から x 軸の向きに、z 軸のまわりを角振動数 ω_1 （角速度ベクトル $\vec{\omega}_1 = (0, 0, -\omega_1)$ ）で回るものとする。この回転磁場に固定した回転座標系から見ると、磁気モーメントは z 軸方向の磁場 [⑧] と回転磁場とで合成された有効磁場を感じる。回転磁場の角振動数が [⑦] に等しいときは、回転座標系では有効磁場の z 成分が 0 となる。このため、磁気モーメントは回転磁場のまわりに [③] 運動する。このとき磁気モーメントの z 成分の時間平均は 0 となる。

このように外部静磁場に垂直な平面内に回転磁場を加えると、その角振動数が [⑦] に等しいとき、外部静磁場方向の磁化成分が変化する。この現象を利用したのが核磁気共鳴である。

[Cの用語一覧]

$\vec{\mu} \times \vec{B}$, $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, $\vec{\mu} \times \gamma \vec{B}$, $\vec{\mu} \cdot \gamma \vec{B}$, 歳差, サイクロトロン, 等速度, 時計回り, 反時計回り,
 $B + \omega$, $B - \omega$, $B - \frac{\omega}{\gamma}$, B , $\frac{B}{\gamma}$, γB , ラーモア角振動数, サイクロトロン角振動数, $B + \omega_1$,
 $B - \omega_1$, $B - \frac{\omega_1}{\gamma}$