2018 年度統計力学 III 問題

担当 吉森 明

4 月 19 日から 5 月 10 日までの問題

1. 足し算を積分にする数学的な論理を成立条件 (仮定) がはっきり分かるようにまとめなさい。(5 点)
2. 1995 年の BEC の実験について授業より詳しく調べてレポートしなさい。(10 点)
3. 1 次元の調和振動子系のフェルミ粒子でフェルミエネルギーを ϵ_F としたとき、絶対零度で $\sum_i f(\epsilon_i)$ を厳密に計算し、積分から計算したものと比べよ。(10 点) 補足: ここで、「積分」とは、
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon)D(\epsilon)d\epsilon \tag{1}$$
のことを指している。$f(\epsilon)$ はフェルミ分布関数、$D(\epsilon)$ は状態密度を表す。
4. $\varepsilon_{\vec{l}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{l})|$ で 2 次元のとき、$\sum_{\vec{l}} g(\varepsilon_{\vec{l}})$ が積分に直せるか授業と同じように議論せよ。(7 点)
5. 授業の設定で化学ポテンシャル $\mu < 0$ を示せ。(5 点)
6. 授業と同じ設定で 2 次元の時 $B_1(1)$ が発散することを示せ。ただし、
$$B_1(z) = \int_0^{\infty} g(\epsilon)\frac{D(\epsilon)}{N}d\epsilon \tag{2}$$
ここで、$z = \exp[\mu/k_{\mathrm{B}}T]$ で μ は化学ポテンシャル、$g(\epsilon)$ と $D(\epsilon)$ はボース分布関数と状態密度、N は粒子数を表す。(5 点)
7. $B_1(1)$ が発散する時、基底状態の粒子数 N_0 がマクロな量になるか調べよ。(7 点)
8. グランドカノニカル分布で $\langle N\rangle = N$ を μ について解くことを考える。与えられた N に対して μ が存在する時、N を一つに決めれば μ も一つに決まることを示せ。ただし、N に対して μ が微分できない場合も含めよ。(30 点)
9. 授業と同じ設定で 3 次元の時 $B_1(1)$ が発散しないことを示せ。ただし、
$$B_1(z) = \int_0^{\infty} g(\epsilon)\frac{D(\epsilon)}{N}d\epsilon \tag{3}$$
(10 点)
10. 授業と同じ設定で、ただし、最低エネルギー準位 (基底状態のエネルギー) が $\epsilon_0(\neq 0)$ のときを考える。つまり、1 粒子のエネルギー固有値が $\varepsilon_{\vec{l}} = (\hbar^2/2m)|\vec{k}(\vec{l})|^2 + \epsilon_0$ で与えられる時、エネルギーの式 $\sum_{\vec{l}} \varepsilon_{\vec{l}} g(\varepsilon_{\vec{l}})$ を積分にした式を書け。(7 点)

11. 状態密度が $D(\epsilon) = 0$ $(\epsilon < 0)$ の時、粒子数 N についての式は、

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) D(\epsilon) d\epsilon + N_0 \tag{4}$$

で与えられるのに、BEC の起こる温度 T_c は

$$N = \int_0^\infty g_c(\epsilon) D(\epsilon) d\epsilon \tag{5}$$

と右辺二項目のない式で決まるのは何故か。ここで、$g_c(\epsilon)$ は温度を T_c にして、$\mu = 0$ にしたボース分布関数を表す。(10 点)

12. BEC を起こす理想ボース気体で $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^m$ $(\epsilon \geq 0)$、$D(\epsilon) = 0(\epsilon < 0)$ の時、BEC が起こると圧力が T^n に比例することを示し、n を求めなさい。(10 点)